

K. Treiber und K. Gollhofer-Berger

Konzentrationsberechnung von Bier mit linearen Dichteformeln

Zur Bestimmung der Stammwürze im Bereich von 13 – 20 GG % ist u.a. eine mathematische lineare Formel nach [2] bekannt, deren Genauigkeit +/- 0,03 GG % beträgt. Diese Formel kann zur Bestimmung der Stammwürze auch im Bereich von 10 – 21 GG% verwendet werden, allerdings mit einer reduzierten Genauigkeit von +/- 0,1 GG %, oder mit einfacher Korrektur der Formel auf +/- 0,07 GG %. Durch weitere Anpassungen dieser mathematischen Formel nach [2] und Bereichseingrenzung ist es möglich, die Stammwürze aus der Dichte $d_{20/4}$ über die Dichte d_T mit einer Genauigkeit von +/- 0,01 GG % im Bereich 10 – 18 GG% zu bestimmen. Bemerkenswert ist hierbei, dass es sich nicht um komplizierte Rechenoperationen handelt, sondern der Zusammenhang mit linearen Funktionen dargestellt werden kann.

BC 20 Allgemeines (Malz- und Bierbereitung)

Deskriptoren: Extraktgehalt, Lineare Rechenformel, Prozesssteuerung, Automation.

Descriptors: Extract content, original wort gravity calculation, process control, automation).

1 Einleitung

Bei der automatischen In-line Konzentrationsbestimmung von Bieren muss aus der gemessenen Dichte bei der Messtemperatur T mittels der Platotabelle (1) die zugehörige Konzentration bestimmt werden. Dazu ist zunächst eine Temperaturkompensation der Dichte auf 20 °C erforderlich. Lineare Gleichungen (2) bieten die Möglichkeit das gemessene Dichtesignal ohne großen Rechenaufwand direkt auf Konzentrationswerte umzuformen.

2 Temperaturkompensations-Formeln

Die Dichte d_T bei der Messtemperatur T kann durch eine Formel (3) in der die Temperatur im dritten Grad als $d = f(T^3)$ vorliegt und einem entsprechenden hohem Rechenaufwand auf $d_{20/4}$ umgerechnet werden. Um den Aufwand zu reduzieren und eine einfache Umrechnung zu erlauben wurden zwei Bereiche linearisiert und durch zwei Geraden und einem Korrekturfaktor $K = f(T)$ (2) ausgedrückt. Die Standardabweichung beträgt $< 1 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ und damit $< +/- 0,03 \text{ }^\circ\text{Plato}$. Interessant ist der Temperaturbereich von 04 – 09 °C für den Gärkellerbereich, Abfüllung, Drucktank, Filtration und der Temperaturbereich 95 – 100 °C für den Kochprozess.

Formeln :

$$\square d_{20/4} = d_T + K \quad (\text{g/cm}^3) \quad [2]$$

$$\square \text{ Faktor K (Temperaturbereich 04 – 09 }^\circ\text{C):} \\ K_{04-09} = -0,002980 + 0,00011 \times T \quad (\text{g/cm}^3) \quad [2]$$

$$\square \text{ Faktor K (Temperaturbereich 95 – 100 }^\circ\text{C):} \\ K_{95-100} = -0,002691 + 0,00070 \times T \quad (\text{g/cm}^3) \quad [2]$$

Mit der linearen Gleichung und den jeweiligen Korrekturfaktoren kann die gemessene Dichte d_T bei der Temperatur T (°C) direkt auf $d_{20/4}$ umgerechnet werden.

Autoren: Dr.-Ing. Karl Treiber, Leiter Maschinen- und Anlagentechnik, Doemens Fachakademie Gräfelfing, und Dipl.-Brmst, Dipl. Wirt.-Ing. (FH) Klaus Gollhofer-Berger, Fa. Brewtech GmbH Hamburg

3 Lineare Gleichungen zur Bestimmung der Stammwürze $^\circ\text{Plato}$ (GG%)

Drei lineare Gleichungen [2] ermöglichen die Stammwürze für drei Bereichen direkt auf die Dichte $d_{20/4}$ umzurechnen:

$$\square \text{ Bereich 1 (04 – 08 GG \%):} \\ P = -249,081 + 249,616 d_{20/4} \quad (\text{GG \%})$$

$$\square \text{ Bereich 2 (08 – 13 GG \%):} \\ P = -240,433 + 241,223 d_{20/4} \quad (\text{GG \%})$$

$$\square \text{ Bereich 3 (13 – 20 GG \%):} \\ P = -229,757 + 231,074 d_{20/4} \quad (\text{GG \%})$$

Die Standardabweichung ist jeweils $<$ als 0,03 GG % oder $< 1 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ (2)

4 Lineare Gleichung für den Bereich 10 – 21 $^\circ\text{Plato}$ (GG %)

Da die Aufspaltung des Bereiches 10 – 21 $^\circ\text{Plato}$ in die zwei Gruppen (08 – 13) GG % und (13 – 20) GG % und damit in zwei

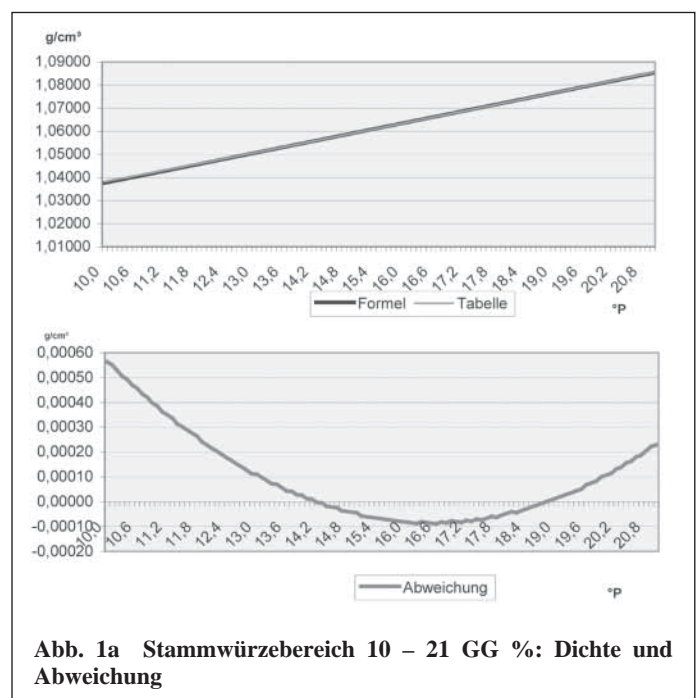


Abb. 1a Stammwürzebereich 10 – 21 GG %: Dichte und Abweichung

°Plato g in 100 g GG %	Dichte 20/4 °C g/cm ³ Formel [2]	Dichte 20/4 °C g/cm ³ Tabelle [1]	Differenz g/cm ³ Abweichung	°Plato g in 100 g GG %	Dichte 20/4 °C g/cm ³ Formel [2]	Dichte 20/4 °C g/cm ³ Tabelle [1]	Differenz g/cm ³ Abweichung
10,0	1,03758	1,03814	0,00056	15,6	1,06181	1,06174	-0,00007
10,1	1,03801	1,03856	0,00055	15,7	1,06224	1,06217	-0,00007
10,2	1,03844	1,03897	0,00053	15,8	1,06268	1,06260	-0,00008
10,3	1,03887	1,03938	0,00051	15,9	1,06311	1,06303	-0,00008
10,4	1,03931	1,03980	0,00049	16,0	1,06354	1,06346	-0,00008
10,5	1,03974	1,04021	0,00047	16,1	1,06398	1,06389	-0,00009
10,6	1,04017	1,04063	0,00046	16,2	1,06441	1,06432	-0,00009
10,7	1,04061	1,04104	0,00043	16,3	1,06484	1,06476	-0,00008
10,8	1,04104	1,04146	0,00042	16,4	1,06527	1,06519	-0,00008
10,9	1,04147	1,04187	0,00040	16,5	1,06571	1,06562	-0,00009
11,0	1,04190	1,04229	0,00039	16,6	1,06614	1,06605	-0,00009
11,1	1,04234	1,04270	0,00036	16,7	1,06657	1,06649	-0,00008
11,2	1,04277	1,04312	0,00035	16,8	1,06700	1,06692	-0,00008
11,3	1,04320	1,04354	0,00034	16,9	1,06744	1,06736	-0,00008
11,4	1,04364	1,04395	0,00031	17,0	1,06787	1,06779	-0,00008
11,5	1,04407	1,04437	0,00030	17,1	1,06830	1,06822	-0,00008
11,6	1,04450	1,04479	0,00029	17,2	1,06874	1,06866	-0,00008
11,7	1,04493	1,04521	0,00028	17,3	1,06917	1,06909	-0,00008
11,8	1,04537	1,04563	0,00026	17,4	1,06960	1,06953	-0,00007
11,9	1,04580	1,04604	0,00024	17,5	1,07003	1,06996	-0,00007
12,0	1,04623	1,04646	0,00023	17,6	1,07047	1,07040	-0,00007
12,1	1,04666	1,04688	0,00022	17,7	1,07090	1,07084	-0,00006
12,2	1,04710	1,04730	0,00020	17,8	1,07133	1,07127	-0,00006
12,3	1,04753	1,04772	0,00019	17,9	1,07176	1,07171	-0,00005
12,4	1,04796	1,04814	0,00018	18,0	1,07220	1,07215	-0,00005
12,5	1,04840	1,04856	0,00016	18,1	1,07263	1,07259	-0,00004
12,6	1,04883	1,04898	0,00015	18,2	1,07306	1,07302	-0,00004
12,7	1,04926	1,04940	0,00014	18,3	1,07350	1,07346	-0,00004
12,8	1,04969	1,04982	0,00013	18,4	1,07393	1,07390	-0,00003
12,9	1,05013	1,05024	0,00011	18,5	1,07436	1,07434	-0,00002
13,0	1,05056	1,05067	0,00011	18,6	1,07479	1,07478	-0,00001
13,1	1,05099	1,05109	0,00010	18,7	1,07523	1,07522	-0,00001
13,2	1,05143	1,05151	0,00008	18,8	1,07566	1,07566	0,00000
13,3	1,05186	1,05193	0,00007	18,9	1,07609	1,07610	0,00001
13,4	1,05229	1,05236	0,00007	19,0	1,07653	1,07654	0,00001
13,5	1,05272	1,05278	0,00006	19,1	1,07696	1,07698	0,00002
13,6	1,05316	1,05320	0,00004	19,2	1,07739	1,07742	0,00003
13,7	1,05359	1,05363	0,00004	19,3	1,07782	1,07786	0,00004
13,8	1,05402	1,05405	0,00003	19,4	1,07826	1,07830	0,00004
13,9	1,05445	1,05448	0,00003	19,5	1,07869	1,07874	0,00005
14,0	1,05489	1,05490	0,00001	19,6	1,07912	1,07919	0,00007
14,1	1,05532	1,05533	0,00001	19,7	1,07955	1,07963	0,00008
14,2	1,05575	1,05575	0,00000	19,8	1,07999	1,08007	0,00008
14,3	1,05619	1,05618	-0,00001	19,9	1,08042	1,08052	0,00010
14,4	1,05662	1,05660	-0,00002	20,0	1,08085	1,08096	0,00011
14,5	1,05705	1,05703	-0,00002	20,1	1,08129	1,08140	0,00011
14,6	1,05748	1,05746	-0,00002	20,2	1,08172	1,08185	0,00013
14,7	1,05792	1,05788	-0,00004	20,3	1,08215	1,08229	0,00014
14,8	1,05835	1,05831	-0,00004	20,4	1,08258	1,08274	0,00016
14,9	1,05878	1,05874	-0,00004	20,5	1,08302	1,08318	0,00016
15,0	1,05921	1,05917	-0,00004	20,6	1,08345	1,08363	0,00018
15,1	1,05965	1,05959	-0,00006	20,7	1,08388	1,08407	0,00019
15,2	1,06008	1,06002	-0,00006	20,8	1,08431	1,08452	0,00021
15,3	1,06051	1,06045	-0,00006	20,9	1,08475	1,08497	0,00022
15,4	1,06095	1,06088	-0,00007	21,0	1,08518	1,08541	0,00023
15,5	1,06138	1,06131	-0,00007				

Abb. 1 Stammwürzebereich 10 – 21 GG %: Dichtetabelle

Formeln aus praktischer Sicht nicht sinnvoll ist, wurde die Formel für den Bereich 3 auf die Stammwürze 10 – 21 GG % mit gutem Ergebnis umgelegt.

Die Abbildungen 1 und 1a geben die Tabelle mit den Werten in Plato und der Dichte nach der Platotabelle [1] und nach der Formel wieder. Ebenso ist die Abweichung grafisch aufgetragen.

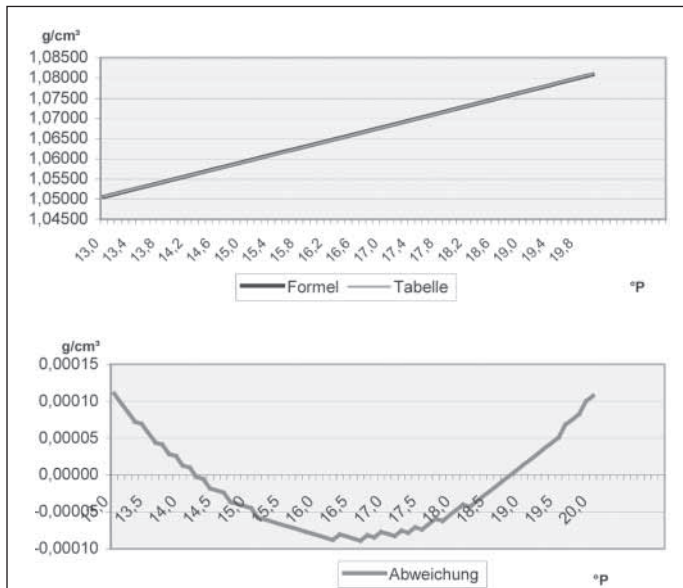
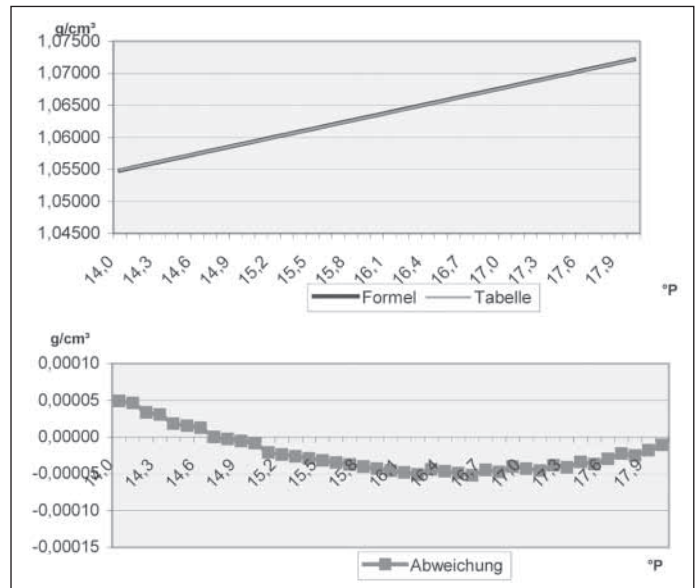
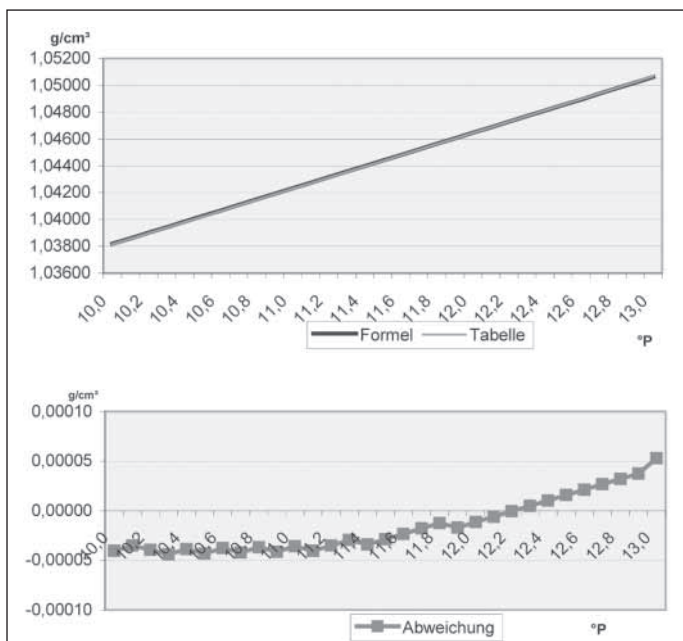


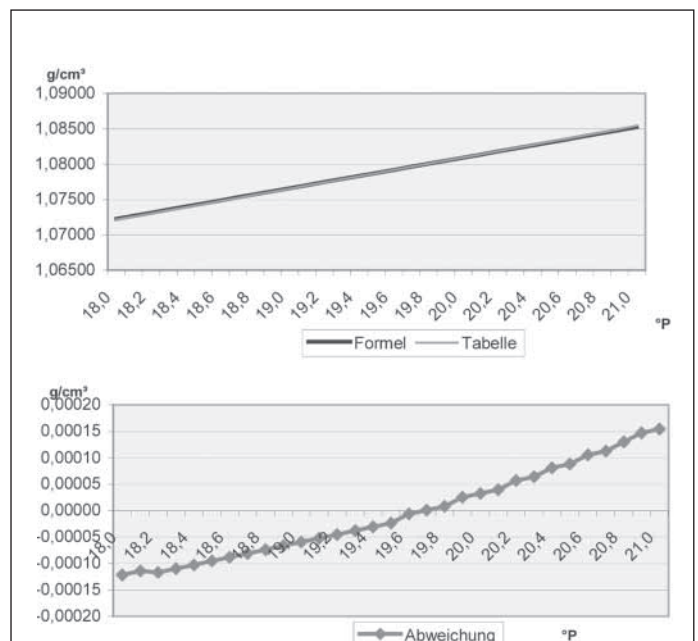
Abb. 2 Dichte und Plato mit der Abweichung im Bereich 13 – 20 GG %



**Abb. 4 14 – 18 GG%,
Abweichung der Dichte $d_{20,4} = \pm 5 \times 10^{-5} \text{ g/cm}^3$,
oder $\pm 0,01 \text{ GG} \%$**



**Abb. 3 10 – 13 GG%,
Abweichung der Dichte $d_{20,4} = \pm 5 \times 10^{-5} \text{ g/cm}^3$
oder $\pm 0,01 \text{ GG} \%$**



**Abb. 5 18 – 21 GG%,
Abweichung der Dichte $d_{20,4} = \pm 1,5 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$
oder $\pm 0,05 \text{ GG} \%$**

Die Abweichung der Dichte $d_{20,4}$ liegt zwischen $+ 5,5 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ und $- 1 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$

Oder $+ 0,1 \text{ GG} \%$ und $- 0,03 \text{ GG} \%$

Die Grafik in Abbildung 1 zeigt, dass die Abweichung im positiven Bereich größer als im negativen Bereich ist. Durch entsprechende Eingrenzung des Bereiches, für den die Formel entwickelt wurde, lässt sich die Abweichung im positiven und negativen Bereich synchronisieren.

Abbildung 2 zeigt die Grafik Dichte und Plato mit der Abweichung im Bereich 13 – 20 GG %.

Die Abweichung der Dichte $d_{20,4}$ beträgt $\pm 1 \times 10^{-4} \text{ g/cm}^3$ oder $\pm 0,03 \text{ GG} \%$

5 Lineare modifizierte Gleichungen Dichte zu Plato

Die obige Abweichung hat einen parabolischen Verlauf. Der Bereich 10 – 21 GG % wurde mit dem Ziel, die Abweichung zwischen den Tabellenwerten und den berechneten Werten durch Modifikation der Formel nach [2] weiter einzugrenzen, in Zonen unterteilt. Die Abbildungen 3 bis 6 zeigen die ermittelten Ergebnisse.

Für den in Abbildung 5 dargestellten Bereich zeigt es sich, dass die Abweichung dort wieder zunimmt. Reduziert man den Bereich auf den für Starkbiere interessanteren Bereich von 16 – 18 GG %, kann die Abweichung durch Modifikation der Formel nach Abbildung 6 deutlich verringert werden.

6 Zusammenstellung der Formeln

Für die folgenden Konzentrationsbereiche wurden die bekannten linearen Gleichungen modifiziert nach:

□ 10 – 14 GG %: $P = -229,757 + 231,0120 d_{20/4}$ (GG %)

□ 14 – 18 GG %: $P = -229,757 + 231,0820 d_{20/4}$ (GG %)

□ 16 – 18 GG %: $P = -229,757 + 231,0899 d_{20/4}$ (GG %)

□ 18 – 21 GG %: $P = -229,757 + 231,0580 d_{20/4}$ (GG %)

7 Zusammenfassung

Bekannt ist u.a. eine mathematische lineare Formel nach [2] zur Bestimmung der Stammwürze im Bereich von 13 – 20 GG % mit einer Genauigkeit von +/- 0,03 GG %. Diese Formel kann zur Bestimmung der Stammwürze auch im Bereich von 10 – 21 GG % verwendet werden, allerdings mit einer reduzierten Genauigkeit von +/- 0,1 GG %, oder mit einfacher Korrektur der Formel auf +/- 0,07 GG %.

Durch weitere Anpassungen dieser mathematischen Formel nach [2] und Bereichseingrenzung ist es möglich, die Stammwürze aus der Dichte $d_{20/4}$ über die Dichte d_T mit einer Genauigkeit von < +/- 0,01 GG % im Bereich 10 – 18 GG % zu bestimmen.

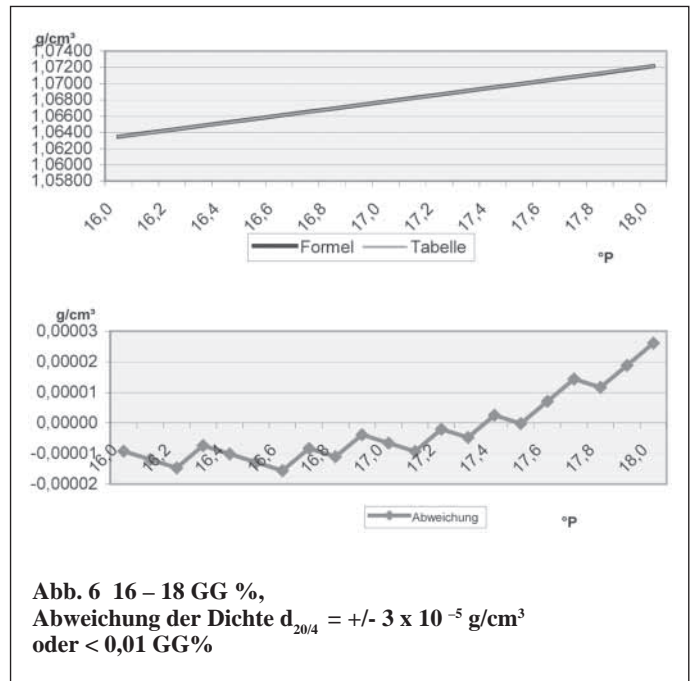
Bemerkenswert ist hierbei, dass es sich nicht um komplizierte Rechenoperationen handelt, sondern der Zusammenhang mit linearen Funktionen dargestellt werden kann.

8 Summary / Résumé

Treiber, K.: Concentration calculation of beer with linear density formulas — Monatsschrift für Brauwissenschaft 56, No. 9/10, 180 – 183, 2003.

BC 20 General information (Malt and beer production)

For the determination of original wort gravity within the range of 13 to 20 w/w-% there is among other things a well-known mathematical linear formula according to [2] with an accuracy of +/- 0,03 w/w-%. This formula can be used for the determination of original wort gravity within a range of 10 to 21 w/w-%, but with a reduced accuracy of +/- 0,1 w/w-% or by applying a simple correction to the formula of +/- 0,07 w/w-%. Through further adjustments of this mathematical formula according to [2] and via range containment it is possible to determine the original wort from the density $d_{20/4}$ over the density d_T with an accuracy of less than +/- 0,01 w/w-% within the range of 10 to 18 w/w-%. Remarkably enough this does not involve complicated arithmetic operations, but rather the fact that this correlation can be described with linear functions.



Treiber, K.: Détermination de la concentration de la bière à l'aide de formules de densité linéaires — Monatsschrift für Brauwissenschaft 56, No. 9/10, 180 – 183, 2003.

BC 20 Généralités (Fabrication du malt et de la bière)

Pour la détermination de la densité du moût primitif dans le domaine de 13 à 20 % m/m, on connaît une formule mathématique linéaire suivante [2] qui a une précision de +/- 0,03 % m/m. Cette formule peut également être utilisée pour la détermination de la densité du moût primitif dans le domaine de 10 à 21 % m/m, toutefois avec une précision réduite de +/- 0,1 % m/m ou avec une correction simple de la formule à +/- 0,07 % m/m. En effectuant d'autres ajustements de cette formule mathématique suivant [2], avec une réduction des limites de densité, il est possible de déterminer la densité du moût primitif à partir de la densité $d_{20/4}$ par la densité d_T avec une précision de < +/- 0,01 % m/m dans le domaine de 10 à 18 % m/m. Il est à remarquer ici, qu'il ne s'agit pas d'opérations de calculs compliquées mais uniquement de liaisons avec des fonctions linéaires.

9 Literatur

1. Goldiner, F., Kleemann, H., Block, D., und Kämpf, W.: Rohrzucker-, Alkohol-, Stammwürze- und Korrektionsstafel, Glasbläserei der Versuchs- und Lehranstalt für Spiritusfabrikation und Fermentationstechnologie VLSF, 1996.
2. Treiber, K.: Der Einsatz der Perlmethode zur Dichtebestimmung beim Brauprozess, Dissertation TU München Weihenstephan 1975.
3. Issing, E.: Die Temperaturabhängigkeit von Viskosität und Dichte bei Bieren-, Ausschlag- und Vorderwürzen, Dissertation TU München-Weihenstephan 1973.

Manuskripteingang 28. 07. 2003